Show that $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times(\mathbf{v}-\mathbf{w})=2\mathbf{w}\times\mathbf{v}$

Useful Properties

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}$

$(k\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=k(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$

$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})$

$=\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})$

$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}$

$=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times(-\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\times(-\boldsymbol{w})$

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0$

$=\mathbf{0}+\boldsymbol{v}\times(-\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}+\mathbf{0}$

$(k\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=k(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$

$=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$

$=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$

$=2\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$