

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Mathématiques : applications et interprétation

## Niveau supérieur

### Épreuve 3

6 mai 2024

**Zone A** après-midi | **Zone B** après-midi | **Zone C** après-midi

1 heure

---

#### Instructions destinées aux candidats

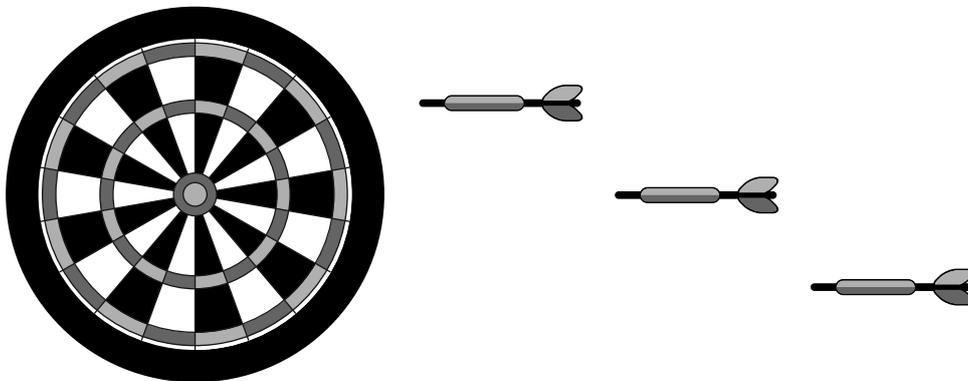
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

Répondez aux **deux** questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 24]

**La question suivante examine les changements dans les scores de joueurs de fléchettes à l'aide de deux tests statistiques.**

Dans le sport de fléchettes, les joueurs lancent à tour de rôle des fléchettes sur une cible afin de marquer des points.



La « moyenne de trois fléchettes » d'un joueur fait référence au score moyen obtenu en lançant trois fléchettes.

Valia avait pour objectif de savoir si les joueurs de fléchettes amateurs de sa région s'étaient améliorés sur une période de 12 mois. Une augmentation de leur « moyenne de trois fléchettes » indiquerait une amélioration.

Elle a sélectionné un échantillon aléatoire de huit joueurs de fléchettes et a enregistré leur « moyenne de trois fléchettes » moyenne de l'année 1.

**(Suite de la question à la page suivante)**

**(Suite de la question 1)**

Elle a ensuite enregistré leur « moyenne de trois fléchettes » moyenne de l'année 2.

Valia a obtenu les résultats suivants :

**Tableau 1**

Joueur	Moyenne de l'année 1	Moyenne de l'année 2
Justin	68,1	70,1
Fallon	72,2	72,0
Rob	65,8	65,0
Michael	73,7	74,9
Mensur	69,8	68,0
Deta	64,5	68,0
Meaghan	69,2	70,6
Peter	64,9	92,9

Valia a calculé la médiane, les quartiles et l'écart interquartile pour chaque année. Les résultats sont présentés dans le **tableau 2**.

**Tableau 2**

	Moyenne de l'année 1	Moyenne de l'année 2
<b>Premier quartile</b>	65,35	68
<b>Médiane</b>	68,65	<i>a</i>
<b>Troisième quartile</b>	71	<i>b</i>
<b>Écart interquartile</b>	5,65	<i>c</i>

(a) Déterminez les valeurs de *a*, *b* et *c*. [3]

(b) En comparant les résultats des deux années résumés dans le **Tableau 2**, indiquez une conclusion, dans son contexte, qui serait justifiée d'être tirée par Valia. [1]

**(Suite de la question à la page suivante)**

**(Suite de la question 1)**

Valia a ensuite décidé d'analyser les données du **Tableau 1** en utilisant un test  $t$  de Student unilatéral pour des échantillons appariés au niveau de signification de 10% pour déterminer si les moyennes des joueurs ont augmenté.

- (c) Indiquez une supposition sur les différences de moyennes qui est nécessaire pour que le test soit valide. [1]
- (d) (i) Indiquez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative pour ce test. [2]
- (ii) Trouvez la valeur  $p$ . [2]
- (iii) Indiquez la conclusion du test dans le contexte, en justifiant votre réponse. [2]
- (e) Indiquez une façon par laquelle Valia aurait pu réduire ses risques de commettre
  - (i) une erreur de Type I. [2]
  - (ii) une erreur de Type II. [2]

Valia n'était pas certaine que la supposition émise dans la partie (c) soit correcte et par conséquent, elle pensait que les résultats de son test  $t$  pour des échantillons appariés ne soient peut-être pas valides.

Après des recherches plus approfondies, Valia a décidé d'utiliser le test des rangs signés de Wilcoxon, qui ne requiert pas l'hypothèse qu'elle a formulée en partie (c).

Pour ce test, les valeurs absolues des différences des moyennes entre l'année 2 et l'année 1 sont classées de 1 à 8, avec les rangs des différences positives ( $P$ ) et les rangs des différences négatives ( $N$ ) séparés en colonnes.

Ceci est partiellement illustré dans le tableau suivant, que Valia construit pour effectuer le test.

Moyenne de l'année 1	Moyenne de l'année 2	Différence	$P$	$N$
68,1	70,1	2,0	$A$	
72,2	72,0	-0,2		1
65,8	65,0	-0,8		2
73,7	74,9	1,2	3	
69,8	68,0	-1,8		$B$
64,5	68,0	3,5	$C$	
69,2	70,6	1,4	$D$	
64,9	92,9	28	8	
<b>Total</b>			$\sum P = 28$	$\sum N$

**(Suite de la question à la page suivante)**

**(Suite de la question 1)**

(f) Déterminez les valeurs de

(i)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . [3]

(ii)  $\sum N$ . [1]

Pour ce test :

- la statistique du test des rangs signés de Wilcoxon est  $T$  = la plus petite valeur choisie entre  $\sum P$  et  $\sum N$ .
- l'hypothèse nulle est que la médiane de la population pour la « moyenne de trois fléchettes » est la même pour les deux années.

Valia décide de réaliser le test au niveau de signification de 5%. À partir des tables statistiques, elle détermine que la région critique est  $T \leq 5$ .

(g) (i) Indiquez l'hypothèse alternative  $H_1$  pour ce test. [1]

(ii) Écrivez la valeur de la statistique de ce test,  $T$ . [1]

(iii) Déterminez la conclusion du test dans le contexte. [2]

(h) Suggérez brièvement comment Valia pourrait évaluer la fiabilité de ses résultats pour l'un ou l'autre test. [1]

2. [Note maximale : 31]

**La question suivante explore une méthode possible pour dessiner des portraits de phase pour des systèmes couplés non linéaires, en prenant un modèle proie-prédateur comme exemple particulier.**

Le parc animalier de Gander Green abrite une population d'oies tchèques ( $x$ , mesurée en centaines), et une population de renards gris ( $y$ , mesurée en centaines).

La recherche indique que la croissance des populations d'oies et de renards peut être modélisée par les équations différentielles suivantes, dans lesquelles  $t$  est mesuré en années.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - \frac{xy}{2} \\ \frac{dy}{dt} &= -3y + xy \end{aligned} \right\} \text{ pour } x, y \geq 0$$

(a) À un instant donné, il y a 500 oies et 500 renards, représentés ici par la paire de coordonnées (5 ; 5). À cet instant, déterminez le taux de variation des

(i) oies. [2]

(ii) renards. [1]

Il existe deux points d'équilibre pour les populations : A(0 ; 0) et B( $p$  ;  $q$ ).

(b) (i) Expliquez pourquoi A est un point d'équilibre. [1]

(ii) Trouvez la valeur de  $p$  et la valeur de  $q$ . [3]

Aux points situés près de A(0 ; 0), on peut ignorer les termes  $xy$  le système pouvant alors être approximé par :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x \\ \frac{dy}{dt} &= -3y \end{aligned} \right\} \text{ pour } x, y \geq 0.$$

(c) En résolvant ces deux équations différentielles,

(i) trouvez une expression pour  $x$  en fonction de  $t$ . [4]

(ii) trouvez une expression pour  $y$  en fonction de  $t$ . [1]

(d) (i) En utilisant vos réponses de la partie (c), montrez que les trajectoires des portraits de phase près de A peuvent être données par l'équation  $x^3 y^2 = k$ , où  $k$  est une constante positive. [3]

(ii) À partir de là, esquissez, sur un portrait de phase, une trajectoire possible pour des petites valeurs de  $x$  et de  $y$ . [3]

**(Suite de la question à la page suivante)**

**(Suite de la question 2)**

Considérez maintenant des points  $(x ; y)$  près de B sur le plan de phase. Ces coordonnées peuvent être réécrites comme  $x = p + X$  et  $y = q + Y$ , où  $p$  et  $q$  sont les valeurs trouvées dans la partie (b)(ii).

- (e) En substituant dans le modèle original, montrez que, pour des petites valeurs de  $X$  et de  $Y$ :

$$\dot{X} \approx -\frac{3Y}{2}. \quad [3]$$

De façon similaire, on peut montrer que  $\dot{Y} \approx 4X$ .

- (f) Sachant que  $\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , où  $\mathbf{M}$  est une matrice carrée, écrivez  $\mathbf{M}$ . [1]

- (g) En trouvant les valeurs propres de  $\mathbf{M}$ , décrivez les trajectoires près du point B. [4]

- (h) À partir de là, esquissez un ensemble complet de trajectoires dans le plan de phase pour le modèle original, en indiquant clairement les deux points d'équilibre. [3]

- (i) Dans ce parc animalier, à un instant donné, il y a 500 oies tchèques et 500 renards gris.

À la lumière des valeurs trouvées dans la partie (a), le gardien de la faune du parc est inquiet et croit que les oies vont rapidement disparaître. Suggérez si cette hypothèse est soutenue par le modèle. Justifiez votre réponse. [2]

**Avertissement :**

Le contenu utilisé dans les évaluations de l'IB est extrait de sources authentiques issues de tierces parties. Les avis qui y sont exprimés appartiennent à leurs auteurs et/ou éditeurs, et ne reflètent pas nécessairement ceux de l'IB.

**Références :**

1. Panimoni, 2022. *Volume Target icon in flat style on color background. Darts game. Arrow in the center aim. Vector design element for you business projects.* [Image en ligne] Disponible sur Internet : <https://www.gettyimages.co.uk/detail/illustration/volume-target-icon-in-flat-style-on-color-royalty-free-illustration/1044319572> [Référence du 21 février 2022]. Source adaptée.

**Tous les autres textes, graphiques et illustrations : © Organisation du Baccalauréat International 2024**